22/10/19

Αξιωματικός Ορισμός (Kolmogorov ~1933)

- Στοιχεία στα οποία στηρίζεται ο αξιωματικός ορισμός:

1) Ένα αρχικό σύνολο $S \neq \emptyset$

2) Μια οικογένεια $\mathcal{A}$ υποσυνόλων του S τω

i) $S \in \mathcal{A}$

ii) Αν $A \in \mathcal{A}$, τότε $A^c \in \mathcal{A}$

iii) Αν $A_1, A_2, \ldots$ ακολουθία στοιχείων της οικογένειας $\mathcal{A}$, τότε $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

Μια οικογένεια που ικανοποιεί αυτές τις ιδιότητες ονομάζεται σ-άλγεβρα ή σ-πεδίο (σ-field)

• Ορισμός: Έστω $S \neq \emptyset$ και $\mathcal{A}$ η σ-άλγεβρα υποσυνόλων του S. Η P λέγεται πιθανότητα ή μέτρο πιθανότητας αν η συνολοσυνάρτηση $P: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί τα αξιώματα:

(A_1): $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$

(A_2): $P(S) = 1$

(A_3): Αν $A_1, A_2, \ldots$ ακολουθία στοιχείων της σ-άλγεβρας $\mathcal{A}$ που είναι ασυμβίβαστα ανά δύο $(A_i \cap A_j = \emptyset)$, τότε $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Ερώτηση: Είναι η κλασική πιθανότητα μέτρο πιθανότητας;

Απάντηση:

Η κλασική πιθανότητα: $P(A) = \frac{\|A\|}{\|S\|}$, $S \neq \emptyset$ και S πεπερασμένο για να είναι μέτρο πιθανότητας πρέπει να ικανοποιούνται τα A_1, A_2, A_3.

Τα A_1, A_2 προφανώς ικανοποιούνται

Το A_3:

Έστω $A_1, A_2, \ldots$ ακολουθία του $\mathcal{A}$.

Επειδή το S είναι πεπερασμένο γι' αυτό έχει πεπερασμένο πλήθος υποσυνόλων. Άρα,

$A_1, \ldots, A_k \neq \emptyset$ και $A_{k+1}, A_{k+2}, \ldots = \emptyset$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \frac{\|\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\|}{\|S\|} = \frac{\|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k \cup A_{k+1} \cup \ldots\|}{\|S\|} = \frac{\|A_1 \cup \ldots \cup A_k\|}{\|S\|} \overset{A_i \cap A_j = \emptyset}{=}$$

$$= \frac{\|A_1\| + \ldots + \|A_k\|}{\|S\|} = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

• Το $(S, \mathcal{A}, P)$ λέγεται χώρος πιθανοτήτων.

Πρόταση: (Ιδιότητες Πιθανότητας)

Έστω $(S, \mathcal{A}, P)$ χώρος πιθανότητας (χ.π). Τότε:

1) $P(\emptyset) = 0$

2) Αν $A \in \mathcal{A}$, τότε $\begin{cases} \alpha) \ P(A^c) = 1 - P(A) \\ \beta) \ 0 \leq P(A) \leq 1 \end{cases}$

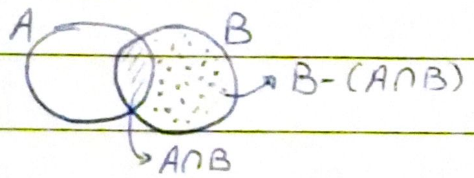
3) Αν $A, B \in \mathcal{A}$ με $A \subseteq B$ τότε $\begin{cases} \alpha) \ P(A) \leq P(B) \\ \beta) \ P(B-A) = P(B) - P(A) \end{cases}$

4) Αν $A, B \in \mathcal{A}$, τότε $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

5) Αν A_k, $k = 1, 2, \ldots \in \mathcal{A}$ αύξουσα ακολουθία ($A_k \subseteq A_{k+1}$), τότε
$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$

6) Αν $A_k \in \mathcal{A}$, $k = 1, 2, \ldots$ φθίνουσα ακολουθία ($A_{k+1} \subseteq A_k$), τότε
$P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$

Απόδειξη 4



Είναι $A \cup B = A \cup [B - (A \cap B)]$

$P(A \cup B) = P[A \cup (B - (A \cap B))] \overset{(A_3)}{=} P(A) + P[B - (A \cap B)] \underset{3(\beta)}{\overset{A \cap B \subseteq B}{=}}$
$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

• Αντίστοιχο του 4) για τρία ενδεχόμενα:

$P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma) - P(A \cap B) - P(A \cap \Gamma) - P(B \cap \Gamma) + P(A \cap B \cap \Gamma)$

Ανισότητα Boole

Έστω χπ $(S, \mathcal{A}, P)$ και $A_k \in \mathcal{A}$, $k=1,2,\dots$, τότε $P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$

Παράδειγμα:

Έστω $(S, \mathcal{A}, P)$ χ.π και $A, B \in \mathcal{A}$ με $P(A)=0,4$ και $P(B)=0,7$.

α) Είναι τα A, B ασυμβίβαστα;

β) ΝΔο $0,1 \leq P(A \cap B) \leq 0,4$

Λύση:

α) Έστω A, B ασυμβίβαστα, δηλαδή $A \cap B = \emptyset$.

Τότε από $A_3) \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,4 + 0,7 = 1,1$. Άτοπο λόγω ιδιότητας ② β)

β) Παρατηρώ ότι $A \cap B \subseteq A \xrightarrow{③ α)} P(A \cap B) \leq P(A) = 0,4$

$P(A \cup B) \leq 1 \xrightarrow{④} P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1 \Rightarrow 0,4 + 0,7 - 1 \leq P(A \cap B)$

$\Rightarrow 1,1 - 1 \leq P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) \geq 0,1$

Παράδειγμα:

Έστω χπ $(S, \mathcal{A}, P)$ και $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$.

ΝΔο $\max\{0, \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - n + 1\} \leq P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \leq \min\{P(A_1), \dots, P(A_n)\}$

Λύση:

- $$\left.\begin{array}{l} A_1 \cap \dots \cap A_n \subseteq A_1 \\ A_1 \cap \dots \cap A_n \subseteq A_2 \\ \vdots \\ A_1 \cap \dots \cap A_n \subseteq A_n \end{array}\right\} \xrightarrow{③ α)} P(A_1 \cap \dots \cap A_n) \leq \left\{\begin{array}{l} P(A_1) \\ P(A_2) \\ \vdots \\ P(A_n) \end{array}\right.$$

  Άρα $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) \leq \min\{P(A_1), \dots, P(A_n)\}$

- $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(\bigcap_{k=1}^{n} A_k) \xrightarrow{② α)} 1 - P((\bigcap_{k=1}^{n} A_k)^c) \xrightarrow[\text{Morgan}]{\text{de}} 1 - P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k^c) \overset{\text{Boole}}{\geq}$

$$\geq 1-\sum_{k=1}^{n} P(A_k^c) \overset{(2)\,\alpha)}{=\!=} 1-\sum_{k=1}^{n}[1-P(A_k)] = 1-n+\sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

Άρα, $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \geq \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - n + 1$

και από $A_1) \Rightarrow P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \geq 0$

Συνεπώς, $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \geq \max\{0, \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - n + 1\}$